分布式算法

**2.1 分析在同步和异步模型下，convergecast算法的时间复杂性。**

证明：

1. 同步模型：在同步模型中，在汇聚算法的每个可允许执行里，每个高为t的树的根节点在t轮里收到所有孩子的消息，使用归纳如下：

归纳基础：t=1时，每个叶子节点距离根节点为1，每个叶子节点发送消息给根节点，根节点在t=1时刻均收到所有叶子节点发来的消息。

归纳假设：假设树的高度为t-1>1，跟节点在t-1轮收到所有孩子的msg。

归纳步骤：当树的高度为t时，由归纳假设，t-1时根的孩子会收到所有叶子节点发来的msg，由同步算法的描述可知，在第t轮时，根会收到所有孩子的msg，所以在t轮，根收到所有叶子节点的msg。

1. 异步模型：在异步模型中，在汇聚算法的每个可允许执行里，每个高为t的树的根节点至多在t时刻里收到所有孩子的消息，使用归纳如下：

归纳基础：t=1时，每个叶子节点距离根节点为1，每个叶子节点发送消息给根节点，由异步模型算法时间复杂度可知，根节点至多在t=1时刻收到所有叶子节点发来的消息。

归纳假设：假设树的高度为t-1>1，根节点至多在t-1时刻收到所有孩子的msg。

归纳步骤：当树的高度为t时，由归纳假设，t-1时刻根的孩子会收到所有叶子节点发来的msg，在至多第t时刻时，根会收到所有孩子的msg，所以在t时刻，根收到所有叶子节点的msg。

**2.2证明在引理2.6中，一个处理器在图G中是从Pr可达的，当且仅当它的parent变量曾被赋过值**

证明：1.首先证明一个处理器在图G中是从Pr可达的，可以推出它的parent变量被赋过值，因为从pr可达，所以可达节点收到过M，则执行了算法中的第五行，即upon receiving M from neighbor pj，由于是容许执行，所以第七行也会被执行，即parent变量会被设置值。

1. 再证明一个处理器的parent变量被赋过值，它在图G是从Pr可达的。因为处理器被赋过值，则算法2.2第七行被执行过，由于是容许执行，所以第五行也会被执行，收到过M，而M是由根节点发出的，所有处理器是从Pr可达的。

**2.3 证明Alg2.3构造一棵以Pr为根的DFS树。**

证明：1.先证明连通性

反证：假设存在两个相邻节点Pi，Pj，Pj是从根Pr可达的，而Pi是不可达的。因为G里一个结点从Pr可达的，当且仅当设置过自己的parent变量，所以Pi在整个过程中parent变量为nil，而Pj设置过自己的parent变量，Pj会发送M给Pi，因该执行是容许的，Pi定会收到M，则执行parent：=j，矛盾。

1. 证明无环：

假设存在一个环，Pi1,....,Pik,若Pi是Pj的孩子，则Pi会在Pj第一次收到M之第一次收到M，因为每个处理器在该环上是下一个处理器的双亲，则Pi1会在Pi1第一收到M之后第一次收到M，则矛盾！

3证明是DFS树。

根据题意只要证明任意结点的子孙结点先于其兄弟结点加入书中，设有结点P1，P2，P3，P2，P3是P1的直接相邻结点，由算法的执行可知，P1先发送M给P2，当且仅当P2向其反回一个<parent>才会向P3发送M，而P2仅在所有子结点向其返回一个<parent>才会向P1发送<parnet>,由此可知，P2的子结点永远是先入P3加入树中。

综上1,2,3可知，Alg2.3构造一棵以Pr为根的DFS树。

**2.4 证明Alg2.3的时间复杂性为O(m)。**

1同步模型：每一轮，根据算法可知消息只发往一个处理器节点，每轮中有且仅有一个消息被传输，除根节点外，所有处理器都是收到消息才被激活，所以不存在多个处理器在同一轮发送消息的情况，所以时间复杂度和消息复杂度一样。

2 异步模型：在一个时刻内至多有一个消息在传输，因此时间复杂度与消息复杂度也是一样的。

3消息复杂度：对任意一条边，在其上传输的消息至多为4个，即2个msgs和2个应答消息（parent or reject）。有m条变，消息至多为4m，所以消息复杂度维O(m)，时间复杂度也为O(m).

**2.5 修改Alg2.3获得一新算法，使构造DFS树的时间复杂性为O(n)，并证明。**

修改方法：当一个几点确定自己的双亲后，向除自己双亲的所有邻居发送一个广播消息，告诉自己已经确定双亲，让其他邻居将这个节点从未访问过的节点集合中删去。这样便不会再向它发送消息，这样每个几点只需三个消息就处理完自己的事情，所以总得消息为3n,时间复杂度为O(n).

**3.1证明同步环上不存在匿名的、一致性的Leader选举算法**

假设A是同步环上的一个匿名算法，每个处理器在系统中具有相同的状态机，如果它选中某处理器为leader，因为环是同步的且只有一种初始配置，故在R上A只有唯一的合法执行。Lemma3.1:在环R上算法A的容许执行里，对于每轮k,所有处理器的状态在第k轮结束时是相同的。即在每轮里，各处理器均发出同样的message，所以在各轮里各个处理器接收到相同的message，则状态改变也相同。导致每个处理器同时宣布自己是Leader。所以同步环系统中匿名的、一致性的领导者选举算法的算法是不存在的。

**3.2 证明异步环系统中不存在匿名的领导者选举算法。**

每个处理器的初始状态相同，状态机相同，接收的消息序列也相同，可能只是接收的时间不相同，故最终处理器的状态也相同。由于处理器接收一条消息至多需要一个时间的单位，假设某时刻某个处理器宣布自己是leader(接收m个消息)，则在有限的时间内（m个时间单位）其他处理器也会宣布自己是leader。所以异步环系统不存在匿名的选举算法。

EX3.9 若将环划分为长度为j(j是2的方幂)的连续片断，则所有这些片断是序等价的.

对一个整数P(0<=P<=n-1),可以表示为：



其中m=lgn;

则有

设P,Q是在同一个片段，P1，Q1在同一个片段,且设这两个片段是相邻的，由模运算的加法可得:

P1=P+L;

Q1=Q+L;

式中L是片段的长度，。

又





且P,Q在同一片段上，有



所以存在r(0<=r<=k),满足，否则,这与P,Q在同一片段上矛盾。设，则根据rev(P),rev(Q)的表示方法可得：



而





显然，P与P1的前K位相同，Q与Q1的前K位相同，由0<=s<=k得：



这两个相邻片段是序等价的，根据等价的传递性，可得所有的片段都是序等价的。